Leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Développements :

Equation de la chaleur, Théorèmes abéliens et taubériens faibles.

Bibliographie :

El Amrani, Gourdon, Combes, Hauchecorne, Briane Pagès, Faraut, Nourdin, Bernis, OA, ZQ, Candelpergher.

Rapport du jury 2018 :

Les résultats généraux énoncés, on attend du candidat qu'il évoque les séries de fonctions particulières classiques : séries entières, séries de Fourier. On pourra éventuellement s'intéresser aussi aux séries de Dirichlet. Il y a beaucoup de développements possibles et les candidats n'ont généralement aucun mal à trouver des idées que ce soit à un niveau élémentaire mais fourni en exemples pertinents ou plus avancé, voire nécessitant une certaine technicité. Par exemple, les théorèmes taubériens offrent une belle palette de développements. Toutefois, il faut vraiment que la leçon soit riche en exemples. Par ailleurs, la leçon n'exclut pas du tout de s'intéresser au comportement des suites et séries de fonctions dans les espaces de type L^p (notamment pour $p = 1$), ou encore aux séries de variables aléatoires indépendantes.

Rapport du jury 2017 :

Une fois les résultats généraux énoncés, on attend du candidat qu'il évoque les séries de fonctions particulières classiques : séries entières, séries de Fourier. On pourra éventuellement s'intéresser aussi aux séries de Dirichlet. Il y a beaucoup de développements possibles et les candidats n'ont généralement aucun mal à trouver des idées que ce soit à un niveau élémentaire mais fourni en exemples pertinents ou plus avancé, voire nécessitant une certaine technicité. Par exemple, les théorèmes taubériens offrent une belle palette de développements. Par ailleurs, la leçon n'exclut pas du tout de s'intéresser au comportement des suites et séries de fonctions dans les espaces de type L^p (notamment pour $p = 1$), ou encore aux séries de variables aléatoires indépendantes.

Remarque 1. *Les fonctions seront définies sur X un espace métrique, à valeurs dans F, un evn. Une série de fonctions de terme général f_n est la suite des $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_n$.*

1 Différents types de convergence

1.1 Convergences simple, uniforme et normale

Définition 2 (El Amrani p189). *Série de fonctions.*

Définition 3 (El Amrani p139). *[Combes p79+100] Convergence simple pour suite et série.*

Remarque 4 (El Amrani p139). *La limite est unique.*

Proposition 5 (Combes p80). *La convergence simple conserve les propriétés liées à l'ordre : convexité, K-lipschitzianité, croissance, etc.*

Exemple 6 (El Amrani p140). *[Combes p79] x^n, $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$.*

Exemple 7 (Gourdon p224). *$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1-\frac{x}{n})^n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers* exp. *$x \mapsto \sum_{n\in N^*} 1/nx$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.*

Remarque 8 (Combes p80). *De nombreuses fonctions sont définies par passage à la limite, à partir d'une suite (f_n). Un problème important est de savoir si, les (f_n) ayant certaines propriétés, ces propriétés se conservent à la limite. Faux pour la continuité comme on le voit dans les exemples précédents. On introduit un autre type de convergence qui assurera la conservation des propriétés essentielles.*

Définition 9 (El Amrani p140). *[Combes p81] Convergence uniforme suite et série.*

Proposition 10 (El Amrani p140). *[Combes p81] Convergence uniforme implique convergence simple.*

Contre exemple 11 (Hauchecorne). *[El Amrani p141] $f_n(x) = x^n$, $g_n = \chi_{[n,n+1]}$, $1/(1+(x-n)^2)$ ne convergent pas uniformément.*

Exemple 12. *Convergence uniforme de x^n sur un compact.*

Exemple 13 (Gourdon p226 ?). *$f_n : x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}^+$ pour $\alpha > 1$. $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)/(x+n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.*

Exemple 14. *La série exponentielle converge uniformément sur tout compact.*

Proposition 15. *Une limite uniforme de fonctions continues est continue.*

Contre exemple 16. *$f_n : x \mapsto 1 - x^n$ converge simplement sur $[0, 1]$ mais sa limite n'est pas continue.*

Proposition 17 (El Amrani p141). *(f_n) converge uniformément s'il existe une suite (a_n) telle que pour tout $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ et (a_n) tend vers 0.*

Exemple 18. *$\sum x^n/n!$ converge uniformément sur $B(0,R)$.*

Proposition 19 (El Amrani p141)**.** *S'il existe une suite telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tend pas vers 0 alors il n'y a pas convergence uniforme.*

Exemple 20 (El Amrani p142)**.** $\sin(nx)/(1+n^2x^2)$.

Proposition 21 (El Amrani p142)**.** *Critère de Cauchy uniforme.*

Exemple 22 (Pommellet p167)**.** *$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$.*

Contre exemple 23 (Gourdon p226)**.** *Sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto x/(x^2+n^2)$ converge simplement mais pas uniformément vers 0.*

Application 24 (Gourdon p227)**.** *Une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes est un polynôme.*

Proposition 25. *Théorème de Weierstrass.*

Remarque 26 (Gourdon p221)**.** *La topologie de la convergence uniforme est celle de la norme $||.||_\infty$.*

Proposition 27 (Combes p82)**.** *[Gourdon p228] Théorème de Dini.*

Exemple 28 (Pomm p168)**.** *Si on pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = (1 - x/n)^n 1_{[0,n]}(x)$, alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : x \mapsto exp(-x)$ sur $\mathbb{R}_+$.*

Application 29. *Glivenko-Cantelli.*

Définition 30 (El Amrani p193)**.** *[Gourdon p222] Convergence normale.*

Proposition 31 (Gourdon p222)**.** *Critère de convergence normale.*

Exemple 32 (Gourdon p222)**.** *La série des x^n/n^2 converge normalement sur $[0,1]$.*

Proposition 33 (Gourdon p222)**.** *Si une série de fonctions à valeurs dans un Banach converge normalement, alors elle converge uniformément.*

Contre exemple 34 (Hauchecorne)**.** *[?] $x \mapsto 1/x si\ n \leq x < n+1$ et 0 si $0 \leq x < n ou\ x \geq n+1$.*

Si on pose, pour $x \in [0,1]$, $f_n(x) = x|\sin(\pi/x)|1_{[1/(n+1),1/n]}(x)$, la série converge uniformément mais pas normalement.

Proposition 35 (Pomm p182)**.** *$f * \rho_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f si f est continue.*

1.2 Convergence dans L^p et convergence presque partout

Remarque 36. *On suppose ici que (E,T,μ) est un espace mesuré, et que $f_n : E \to \mathbb{R}$ où $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne. On note λ la mesure de Lebesgue.*

Définition 37 (Briane p105)**.** *Convergence presque partout.*

Exemple 38. *x^n converge pp vers 0 sur $[0,1]$.*

Définition 39 (Briane)**.** *Convergence L^p.*

Exemple 40 (Briane, Faraut ?)**.** *$x \mapsto e^{-nx}$ converge pp et dans L^p vers 0 pour tout $p \in [1,+\infty]$.*

Contre exemple 41 (Faraut ?)**.** *$(1_{[n,n+1]})_n$ converge presque partout (et même simplement) vers 0 mais pas dans L^p pour $p \in [1,+\infty]$. La suite de fonctions "stroboscope" converge dans L^p vers 0 mais pas presque partout.*

ou voir Briane p162.

Théorème 42 (Briane)**.** *Théorème de Riesz Fischer.*

Proposition 43 (Briane, Faraut)**.** *Si $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^p(\mu)$, elle possède une sous-suite qui converge μ-p.p.*

Proposition 44. *$\rho_n * f$ converge vers f dans L^p.*

2 Théorèmes d'interversion et régularité

2.1 Continuité

Remarque 45. *Les résultats vrais pour les suites s'adaptent aux séries en considérant la suite des sommes partielles.*

Proposition 46 (Gourdon p222)**.** *Continuité de la limite. (Ici ou avant ?)*

Contre exemple 47 (Hauchecorne)**.** *[El Amrani p146] Une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction discontinue. (x^n).*

Exemple 48 (Gourdon p282)**.** *La fonction ζ est continue sur $]1,+\infty[$.*

2.2 Interversions de limites

Contre exemple 49. *On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t > 0$, $f_n(t) = nt$. On a $\lim_{t\to 0} \lim n \to +\infty f_n(t) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \lim_{t\to 0} f_n(t) = 0$.*

Théorème 50 (Nourdin p73)**.** *[El Amrani p147] Théorème de la double limite.*

Remarque 51. *C'est un critère pour nier la convergence uniforme. $\frac{\sin(nx)}{n+x}$.*

Exemple 52 (Gourdon p282)**.** *La fonctions ζ tend vers 1 en $+\infty$.*

2.3 Dérivation

Contre exemple 53. $\frac{\sin(nt)}{\sqrt{n}}$.

Théorème 54 (Gourdon p223). *Dérivation de la limite uniforme d'une suite de fonctions.*

Exemple 55 (Gourdon p224). exp *est continue.*
$\sum x^n/n!$ *est une série normalement convergente sur tout compact de* $\mathbb{R}$, *ainsi que toutes ses séries dérivées. Sa limite, noté* exp, *est donc une fonction de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *tout entier, qui vérifie de plus* $exp' = exp$.

Exemple 56 (Gourdon p282). *La fonction* ζ *est* C^∞.

Contre exemple 57 (El Amrani p148). *Si on pose, pour* $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$, $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ *et la suite converge uniformément vers* $|.|$ *qui n'est pas dérivable en* 0.

2.4 Intégration

Contre exemple 58. *Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n = 1_{[0,n]}/n$, *on a* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* 0 *mais* $\int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt = 1 \neq 0$.

Proposition 59 (Gourdon p222). *Interversion limite et intégrale sur un segment avec convergence uniforme.*

Application 60 (Pomm p190). $\int \sum c_n e^{int} e^{-ipt} \mathrm{d}t = c_p$.

Exemple 61. $\int_0^1 \sin(nt)/(n+t)dt \to 0$.

Proposition 62 (Briane p131). *Théorème de Beppo Levi.*

Corollaire 63 (Briane). *Interversion avec les séries.*

Exemple 64 (Briane p117). $\int \sin(x)/(exp(x) - 1) = \sum 1/(1+n^2)$.

Proposition 65 (Briane p131). *Lemme de Fatou.*

Proposition 66 (Briane p165). *Théorème de convergence dominée.*

3 Séries entières

3.1 Propriétés

Définition 67 (Gourdon p236). *Série entière.*

Exemple 68.

Proposition 69 (Gourdon p236). *Lemme d'Abel.*

Définition 70 (Gourdon p237). *Rayon de convergence.*

Proposition 71 (Gourdon p237). *Caractérisation de la nature de la série en fonction du rayon.*

Définition 72 (Gourdon p237). *Disque de convergence.*

Exemple 73. *Série des* z^n *a pour rayon de convergence* 1.

Proposition 74 (Gourdon p237). *Règle de d'Alembert.*

Exemple 75 (Gourdon p237). *Série des* $z^n/n!$.
Série $n!z^n$.

Proposition 76 (Gourdon p237). *[Nourdin p214] Règle d'Hadamard.* $1/R = limsup(|a_n|^{1/n}$.

Exemple 77. *Série des* z^{2n}.

Proposition 78. *La série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence.*

Remarque 79 (Gourdon p237). *La série entière peut converger ou non sur son disque ouvert de convergence.*

Exemple 80 (Hauchecorne p261). *La série des* z^n *diverge sur le cercle de convergence.*
La série des $(1/n^2)z^n$ *converge sur tout le cercle de convergence.*
La série des $(1/n)z^n$ *converge en certains points et diverge en d'autres points du cercle de convergence.*

Proposition 81. *Théorèmes d'angulaire et taubérien faible.*

3.2 Régularité des séries entières

Proposition 82 (Gourdon p238). *Continuité sur le disque ouvert de convergence.*

Remarque 83 (OA p48). *Uniforme continuité sur les compacts du disque de convergence.*

Exemple 84 (Gourdon p243). exp, cos, sin.

Proposition 85 (Gourdon p238). *Dérivabilité.*

Proposition 86. *Expression des coefficients. Donc unicité du DSE.*

Exemple 87. *Pour* $\sum x^n n = 1/(1-x)$, *on trouve alors* $1/(1-x)^2 = \sum(n+1)x^n$ *sur* $]-1,1[$.

Proposition 88 (OA p48). *La somme d'une série entière est holomorphe en tout point du disque ouvert de convergence. Valeur de la dérivée.*

Théorème 89 (OA p48). f *est* C^∞ *sur le disque ouvert de convergence.*

Théorème 90 (ZQ p45). *La somme d'une série entière est analytique dans le disque ouvert de convergence.*

4 Séries de Fourier

Remarque 91. *Peut-être faire le tri...*

Définition 92 (Candel p308)**.** *[Gourdon p258]* $c_n(f)$.

Proposition 93 (Candel p313)**.** *Lemme de Riemann Lebesgue.*

Définition 94 (Gourdon p258)**.** *Série de Fourier.*

Proposition 95 (Candel p310)**.** *La suite des coefficients de f est dans $l^2(\mathbb{Z})$.*

Définition 96 (Candel p308)**.** *Somme partielle de la série de Fourier.*

Proposition 97. *(e_n) base hilbertienne de L^2.*

Remarque 98. *S_n est la projection orthogonale de f sur l'espace vectoriel $P_n = e_{-n}, ..e_{-1}, \vec{e}_0, e_1, .., e_n$, ie sur l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n.*

Proposition 99 (Candel p308)**.** *La suite des sommes partielles converge dans L^2 vers f, ie la somme de la série de Fourier de f est égale à f. La série de Fourier converge dans L^2. (Mettre tout de suite Parseval ?)*

Proposition 100 (Candel p310)**.** *Egalité de Parseval.*

Proposition 101 (Candel p313)**.** *Propriété d'injectivité.*

Proposition 102 (Candel p316)**.** *Théorème de convergence uniforme.*

Corollaire 103 (Candel p317)**.** *Convergence uniforme dans le cas où f est C^1.*

Exemple 104 (Candel p317)**.** *Cacul d'une somme avec $f(x) = x(1-x)$.*

Théorème 105 (Candel p319)**.** *Théorème de Dirichlet.*

Théorème 106 (Candel p334)**.** *Théorème de Fejer. Soit $f \in L^1$, 1 périodique.*
En tout point de continuité de f, $F_n * f(x)$ tend vers $f(x)$.
Si f est continue, la convergence est uniforme.
On a la convergence dans L^1.

Exemple 107 (Gourdon)**.** *Calculs des sommes des $1/n^2$, $1/n^4$.*

Application 108. *Equation de la chaleur.*

Application 109 (Gourdon p273)**.** *Formule sommatoire de Poisson et application.*